

חדרה 2 הנדסת מכונות



$$\sqrt{2}$$
A square containing the numbers 1, 1, and $\sqrt{2}$, with a diagonal line through it.



$$AND$$
A white diagram on a light green background showing a standard electronic AND gate symbol.

$$\{\sqrt{x}\}^2$$
A white equation on an orange background showing the expression $\{\sqrt{x}\}^2$.



תוכן העניינים

1.	1.	1. אינטגרלים לא אמיתיים
12.	12.	2. קווים ותוחמים במישור, משטחים וגופים במרחב
39.	39.	3. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
47.	47.	4. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
54.	54.	5. מבוא לטופולוגיה
57.	57.	6. נגורות חלקיות דיפרנציאబליות
68.	68.	7. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
72.	72.	8. נגורת מכונת וגרדיאנט
77.	77.	9. פונקציות סתוומות - שימושים גיאומטריים
91.	91.	10. נוסחת טילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלים
94.	94.	11. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
96.	96.	12. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים
98.	98.	13. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
101.	101.	14. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
103.	103.	15. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
104.	104.	16. אינטגרלים כפולים
110.	110.	17. שימושי האינטגרל הכפול
113.	113.	18. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)
118.	118.	19. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)
120.	120.	20. אינטגרלים תלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)
129.	129.	21. סדרות
162.	162.	22. טורים עם איברים קבועים
176.	176.	23. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות

תוכן העניינים

185.....	24. טורי טילור - מקלורן
200.....	25. נושאים מתקדמים - הציגה פרמטרית של פונקציה

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 1 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1.	אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.....
3.	אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
4.	אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי.....
5.	שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים.....
6.	מבחני השוואה.....
8.	התכנסות בבחירה.....
9.	בחן דיריכלה.....
10.	התכנסות בתנאי.....

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

6) הוכחו כי $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

7) הוכחו כי $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

תשובות סופיות

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{1}{2e}$

(4) מתבדר : ∞ .

(5) $\frac{5}{4e^2}$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

- (1) מתבדר : ∞ .
- (2) מתבדר : ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר : ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבו את השטח בין גرف הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x עבור $1 \leq x$.

2) חשבו את השטח בין גرف הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$. ידוע כי השטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- 1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתבדר.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

התכנסות בהחלה

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

4) הוכיחו : אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, או $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ א. } (1)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ א. } (2)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx . \text{ א. } (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx . \text{ ב.}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx . \text{ ג. } (4)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx . \text{ ד. } (5)$$

תשובות סופיות

- 1) א. מתכנס בהחלט עבור $p < 1$ ומtbodyר עבור $p \geq 1$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומtbodyר עבור $p \geq 2$.

2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור $1 \leq p < 0$, מתכנס בהחלט עבור $2 < p < 1$, מtbodyר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $5 < p < 1$, מtbodyר עבור $p \geq 5$.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 2 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור	12
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית	16
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קווטבית (פולרית)	22
4. משטחים במרחב	27
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית	(לא ספר)
6. גופים במרחב	29
7. קוואורדינטות גליליות וצדוריות	32
8. נספח – משטחים מעלה שנייה	36

קוויים ותחומיים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) | x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) | x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) | |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) | |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) | (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המר策 והרדיזוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חlek מעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלк ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) | 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \left\{ (x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2} \right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- א. הוכחו שהמשוואה מוגדרת אליפסה ושרטטו אותה.
- ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי העליון ואת החצאי התחתון של האליפסה.
- ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי הימני ואת החצאי השמאלי של האליפסה.
- ד. מהי קבוצת כל הנקודות במשורר, החסומה בתחום האליפסה או עליה?
- ה. מהי קבוצת כל הנקודות במשורר, החסומה בתחום האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \right\}$

ג. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2} \right\}$

ד. $S = \left\{ (x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2 \right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) | -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) | y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קוויים ותחומיים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0$ $x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi$ $x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi$ $x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה שmbטאת כל מסלול
באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (קבוע).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה A(2,2) לנקודה B(-2,-2).

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

4) נתונים שני מעגלים $x^2 + y^2 = 25$ ו- $(y-4)^2 + (x-8)^2 = 25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתוחם הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך y הגדול יותר.

מצאו את הצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתוחם החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצוגן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות. מצאו את הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התוחם, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרbole $4x^2 - y^2 = 4$.

א. ההיפרbole מורכבת משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציינו באופן פרמטרי את התוחם המוגבל בין היפרbole לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2 - y^2 = 3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף אי' מורכב משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנutan מהנקודה $(-3, -2)$ לנקודה $(0, -1)$.

כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$. $0 \leq t \leq 2\pi$

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$. $-\pi \leq t \leq 2\pi$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 . \quad \text{ב.} \quad y = x - 1, x \geq 1 . \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 . \quad \text{ג.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} . \quad \text{ג.} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 . \quad \text{ב.} \quad y = (x+4)^2 . \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 . \quad \text{ו.} \quad x^2 + y^2 = 25 . \quad \text{ז.} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 . \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v & 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = u \cos v & \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} . \quad \text{ט.}$$

א. המעלג $x^2 + y^2 = 25$: מרכז $(0,0)$. רדיוס : 5.

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

המעלג $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 25$: מרכז $(8,4)$. רדיוס : 5.

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

$$\text{ב. מקרה 1: } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2: } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\{(x, y) | -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) . \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t & \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y(t) = 2 \sin t & \end{cases} : DA$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t & \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \\ y(t) = 2 \sin t & \end{cases} : BC$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t & \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t & \end{cases} : AB$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t & \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t & \end{cases} : CD$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \end{cases}$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \end{cases} . \text{ט}$$

6) א. אלגברית: ימנית שמאלית $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$

פרמטרית: ימנית שמאלית $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

. $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$ א. הiperבולת. ב. אלגברית: ימנית שמאלית

פרמטרית: ענף ימני וענף שמאלי $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. ט $C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$.

8 (8)

 $6\pi\sqrt{29}$ (9)

קוויים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-4, 0)$ לנקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $x^2 - 4x - xy = 1$ לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

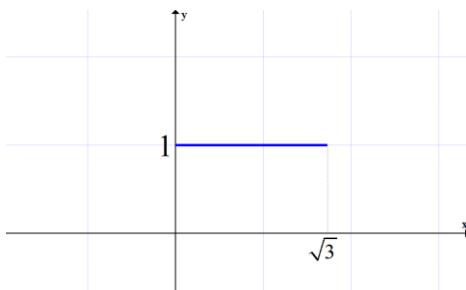
- א. המירו את המשוואה $y^2 + x^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה $10 = x$ לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה $4 = y$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

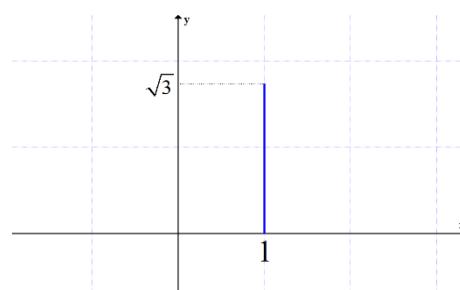
- א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = 4/\pi$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שיכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקוים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים שכל אחד מהקוים מתאר חלק מעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכחו שככל אחד מהקוים מתאר חלק מעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מותאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

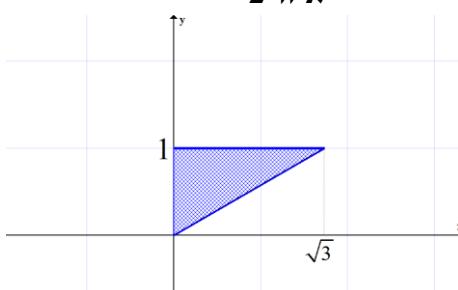
ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

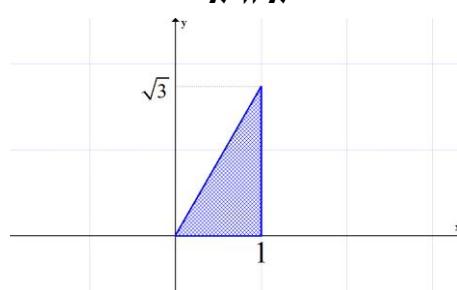
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2} \right\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
 כתבו כל אחד מתחוםים אלה בהצגה פולרית ותארו במלילים כל אחד מתחומיהם.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ נ. } \text{ (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ נ. } \text{ (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ נ. } \text{ (5)}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } \quad r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ נ. } \text{ (6)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (7)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ט}$$

$$r = 6 \sin \theta, \quad 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב.} \quad r = 4 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ נ. } \text{ (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ט.} \quad \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ט}$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \text{ נ. (11)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \text{arctan} \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (12)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (14) \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו וشرطו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

4) זהו וشرطו את המשטחים הבאים :

א. $z = 4x^2 + y^2 + 1$

ב. $z = 3 - x^2 - y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

א. $25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100$

ב. $25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0$

ג. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $0 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206$.
א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ו- $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$.
א. זהו את המשטח וشرطו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור,
ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10) נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים וشرطו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .
- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
 - פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
 - אליפסואיד.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
 - הчитוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
 - ספרה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
 - נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
 - הчитוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 - $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
 - שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי.
- ד. $\sqrt{2}$. $C: x = -\cosh t$, $y = \sqrt{3} \sinh t$, $z = \cosh t$ $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$.

גופים במרחב **שאלות**

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

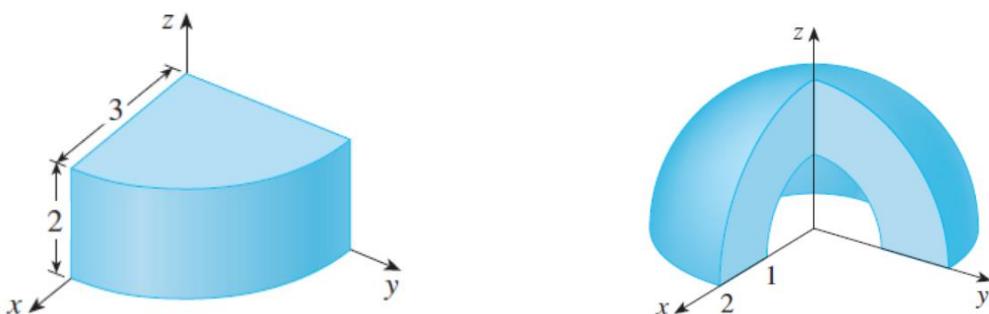
ד. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ה. $U = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים אירור של גוף V במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית {} |

א. ב.



7) נתונים המשטחים $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים שם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2 + z^2$

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכותבו אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משווה עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומיים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטו את D , החיתוך של W עם המישור $1 = y$ (במערכת צירים zx),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

[לפתרונות מלאים ראו את הסרטיונים באתר GooL.co.il](http://GooL.co.il)

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- 1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $z = 3$
 ב. $z = 4x^2 + 4y^2$
 ג. $x^2 + y^2 = 4$

- 2)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 ב. $2x + 3y + 4z = 1$
 ג. $x^2 = 16 - z^2$
 ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- 3)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשווהה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

- א. $r = 3$
 ב. $z = r^2$
 ג. $z = r$
 ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$
 ה. $r = 4 \sin \theta$
 ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \right\} \text{ ב.}$$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \right\} \text{ ב.}$$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ ב.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ ג.}$$

$$U = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z = r \cdot \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = r^2 \cdot \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$. מערכת כדורית: שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2 \cdot \frac{2}{\sin \phi}$. מערכת כדורית: שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $9 = r^2 + z^2$. מערכת כדורית: $3 = r$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$. מערכת כדורית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $r = z \cdot \frac{\pi}{4}$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $x = y$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y-2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $(z-2)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

$$\text{א. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2 \right\} . \text{א} \quad (7)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2 \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{א} \quad (8)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ג}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin\theta \right\} . \text{ד}$$

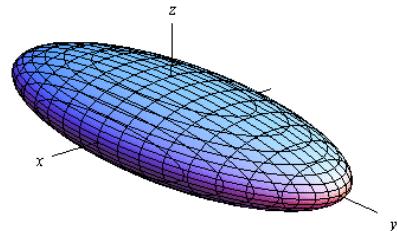
נספח – משטחים ממעלת שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
 כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$. אם נקבל בדור עם רדיוס a והחתכים הניל הם מעגלים.

אליפסואיד

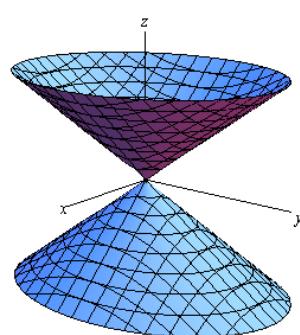


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
 החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
 החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים החתכים
 בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
 הם היפרבולות.
 * מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
 בלבד באחד האגפים.

חרוט אליפטי

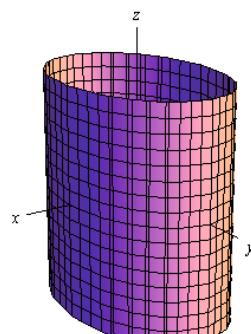


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
 במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו-
 zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
 מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הניל הם מעגלים.
 * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
 במשוואת הגליל.

גליל אליפטי



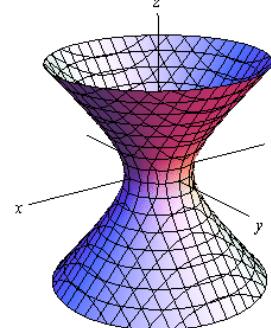
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד חד-יריעתי



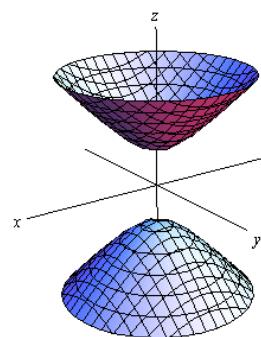
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

משוואה :

תיאור : למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

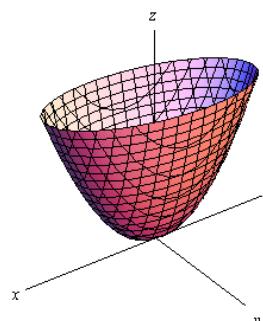
משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

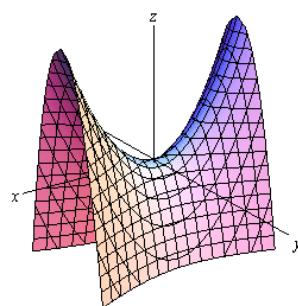
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך גם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

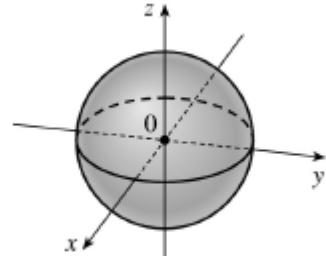
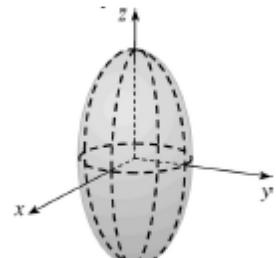
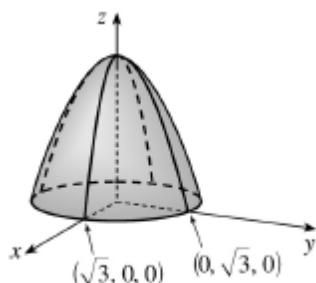
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשנתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



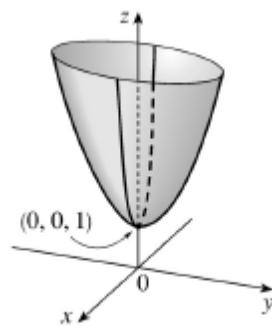
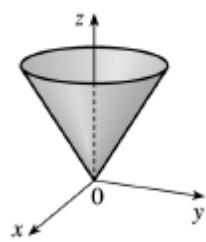
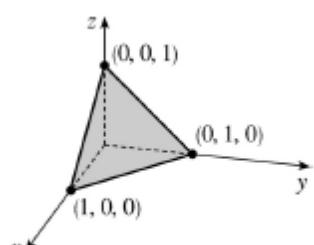
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 3 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים	39
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים	41
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים	43
4. נספח – משטחים ממוקדים	44

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- شرطו סキיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$(u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}}) \quad (11)$$

$$(f(x, y) = \tan \frac{y}{x}) \quad (12)$$

$$(f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}) \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה :

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה :

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x-y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y-x^2, x+y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

14) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$

- א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
ציררו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשפטים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שותות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים וشرطוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה וشرطו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה וشرطו אותו.

3) עברו כל אחת מהפונקציות הבאות למצאו את משטחי הרמה:

A. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
B. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- 1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיווסה 2.
- 2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- 3)
 - A. מישוריים.
 - ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- 4) עברו $0 < k \leq 1$ לא קיים משטח רמה k .
עבור $0 = k$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $1 = k$ מישוריים.
עבור $1 > k$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
עבור $1 < k < 0$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- 5) עבור $0 < k < 1$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $0 = k$ חרוט אליפטי.
עבור $0 < k$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

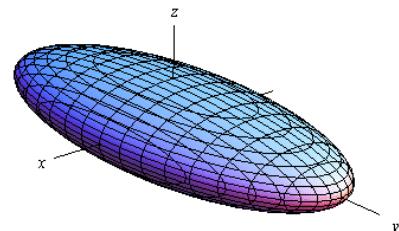
נספח – משטחים ממעלה שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
 כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$. אם
 נקבל בדור עם רדיוס a והחתכים הנילם הם מעגלים.

אליפסואיד

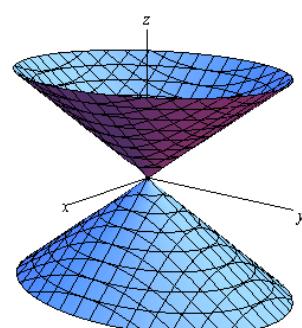


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
 החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
 החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים החתכים
 בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
 הם היפרבולות.
 * מרכז החורוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
 בלבד באחד האגפים.

חרוט אליפטי

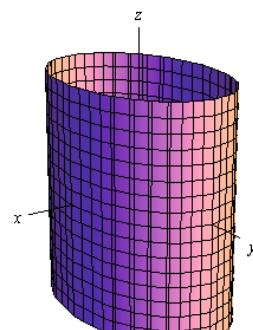


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
 במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו-
 zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
 מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הנילם הם מעגלים.
 * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
 במשוואת הגליל.

גליל אליפטי

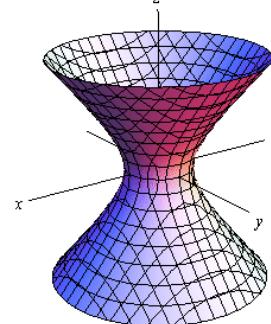


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid חד-יריעתי

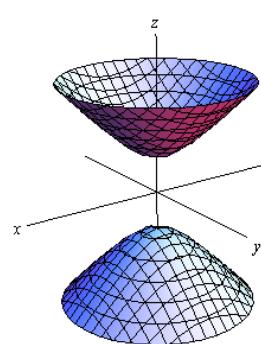


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid דו-יריעתי



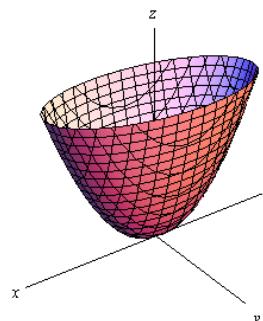
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראסית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז הפרבולoid האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולoid נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולoid נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

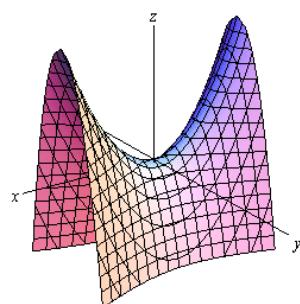
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך גם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

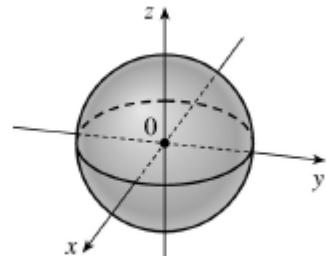
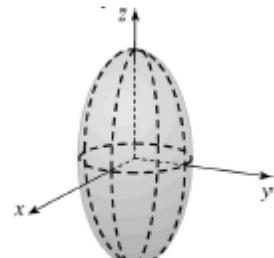
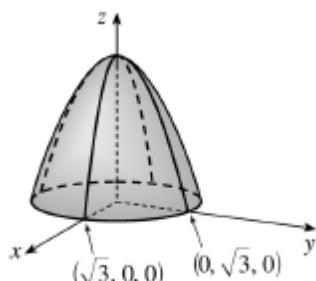
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



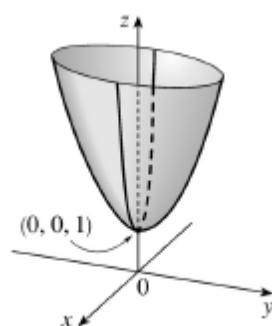
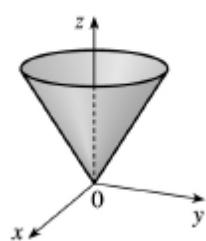
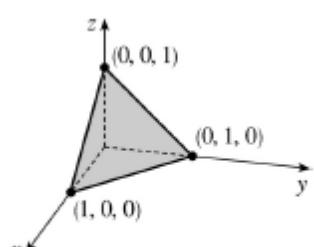
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 4 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

47	1. גבול של פונקציה של שני משתנים.....
50	2. רציפות של פונקציה של שני משתנים.....
53	3. נוסחאות – גבולות

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2+y) \ln(x^2+y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 17-10 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 25-18 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20 ו-23-25 מומלץ לנסות לפתרור בשתי דרכי שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שיתכן שהגבול הידוע לא יינתן בוגר השאלה.

. 27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

. 28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

. 29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

5) אין סוף.

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

17 – 20) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלוות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתיה רציפה בנקודה?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלוות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (6)$$

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f(x) = f$, שאינה פונקציה קבועה,

$$\cdot g(x,y) \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ונגידר פונקציה חדשה

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

$$\text{אם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) \text{ לכל } y,$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) \text{ לכל } x,$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ לכל (x,y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ k & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

11) נתון כי :

לכל x מתקיים $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq y_2 - y_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y) - f(x_1,y)| \leq x_2 - x_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו :

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

$$\cdot z(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ונגידר פונקציה חדשה

$$\text{ידעו כי } 0 < z(1,14) < 0, \quad z(14,1) > 0.$$

או בתחום ההגדרה של z קיימת נקודת (c_1, c_2) כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $1 > m$ הפונקציה רציפה, ועבור $1 \leq m$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

 $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0^+} = \infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$y = e^x$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$e^0 = 1$$

$$e^\infty = \infty$$

$$y = \ln x$$

 \dots

$$\ln(0^+) = -\infty$$

$$\ln(\infty) = \infty$$

$$y = \arctan x$$

$$\operatorname{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{atan}(0) = 0$$

$$\operatorname{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$y = a^x, a > 1$$

$$a^{-\infty} = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^\infty = \infty$$

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

$$a^{-\infty} = \infty$$

$$a^0 = 1$$

$$a^\infty = 0$$

$$y = \sin x$$

 \dots

$$\sin 0 = 0$$

 \dots

$$y = \cos x$$

 \dots

$$\cos 0 = 1$$

 \dots

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

$$0$$

$$1$$

$$0$$

$$y = \frac{\tan x}{x}$$

 \dots

$$1$$

 \dots

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e$$

(from right)

$$1$$

$$e$$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

 \dots

$$e$$

$$1$$

$$y = \sqrt{x}$$

 \dots

$$\sqrt{0^+} = 0$$

$$\sqrt{\infty} = \infty$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

 $-\infty$

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{\infty} = \infty$$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 5 - מבוא לטופולוגיה

תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה.....
54

מבוא לטופולוגיה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:

אחד אשר נמצא בקבוצה ואחד אשר אינו נמצא בקבוצה.

הערה: נקודות שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

2) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:

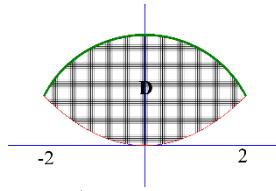
אחד אשר נמצא בקבוצה ואחד אשר אינו נמצא בקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

- 3) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y}$.
- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
 - שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
 - האם הקבוצה חסומה?
 - האם הקבוצה קשירה?
 - רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
 - האם הקבוצה פתוחה?
 - מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה: אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
 - האם הקבוצה סגורה?
 - האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
 - האם הפונקציה רציפה ב- D ?

תשובות סופיות

ב.

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5, y > \frac{1}{4}x^2 \right\} \quad (1)$$

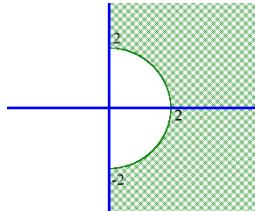
ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

- ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}$
- ו. הקבוצה אינה פתוחה.

$$\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid 4y = x^2, -2 < x < 2\}}_E \quad \text{ז.}$$

(5,0) נקי שפה ששייכת לקבוצה. (0,0) נקי שפה שאינה שייכת לקבוצה.

- ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.
- ו. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



ב.

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

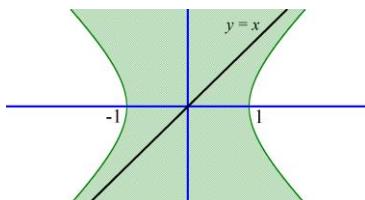
ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

- ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}$
- ו. הקבוצה אינה פתוחה.

$$\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid x = 0, |y| > 2\}}_E \quad \text{ז.}$$

(2,0) נקי שפה ששייכת לקבוצה. (0,3) נקי שפה שאינה שייכת לקבוצה.

- ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה D.
- ו. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



ב.

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

- ה. כל הנקודות ב-D פנימיות למעט הנקודות: $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ or } y = x\}$
- ו. הקבוצה אינה פתוחה.

$$\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid y = x\}}_E \quad \text{ז.}$$

(0,0) נקי שפה ששייכת לקבוצה. (-1,0) נקי שפה שאינה שייכת לקבוצה.

- ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה $f(x, y)$ לא חסומה בקבוצה D.
- ו. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 6 - נזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

57	1. נזרות חלקיות מסדר ראשון.....
59	2. נזרות חלקיות מסדר שני
63	3. נזרות חלקיות לפי הגדרה.....
65	4. דיפרנציאbilיות.....

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad .(f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$. z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$. x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$. f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$. \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) \quad \text{חשבו}$$

הערת סימונו

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$ $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$ $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

נגורות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגורות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

16) חשבו $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

17) חשבו $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

18) נתנו $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$
 $\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$, f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y)$$

$$f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y)$$

$$f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0$$

$$f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x$$

$$f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

נגזרות חלקיות לפי ההגדלה

שאלות

$$1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.
- ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?
- ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$2) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$3) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$4) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.
- ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

$$5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
- ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

$$6) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4) = f_{xyxyxyx}(1,4)$

הערה
תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. 0 ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$ ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 1$

3) $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. 0

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad 5) \quad \text{א.}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6) א. $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

.**1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+y}{y+4x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (4)$$

.**5** בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6 נתון $, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ קבוע.

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
- ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
- ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$7) \text{ נתון } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגידיר פונקציה חדשה}$$

נתון $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f(0,0)$
 הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$9) \text{ בדקו דיפרנציאביליות } , f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0,0).$$

$$10) \text{ נתונה } f : R^n \rightarrow R, \text{ המוגדרת על ידי} \\ . f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases} \text{ האם } f \text{ דיפרנציאבילית בנקודה } x = 0 ?$$

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במשור.
 ג. $m > 2$ ב. $0 < m < 1$ ג. $m < 0.5$ ד. לכל m
- (6) א. $m > 1$
- (7) ב. $m < 1$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 7 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....
68

כל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון : $x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = \ln(x^2 - y^2)$

חשבו : z_u, z_v

2) נתון : $v = 4t + k, \quad u = t^2 + 4m, \quad z = e^{u-v}$

חשבו : z_t, z_m, z_k

3) נתון : $z = f(x^2 - y^2)$

הוכחו : $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

4) נתון : $z = f(xy)$

הוכחו : $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

5) נתון : $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$

הוכחו : $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

6) נתון : $z = f(x-y, y-x)$

הוכחו : $z_x + z_y = 0$

7) נתון : $w = f(x-y, y-z, z-x)$

הוכחו : $w_x + w_y + w_z = 0$

8) נתון : $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$

הוכחו : $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{א.}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \quad \text{ב.}$$

ג. חשבו את $f'(0) = 2, g'(0) = 1$ אם ידוע ש- $u_{xy}(1, \pi) = 1$.

14) נתון: $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$

$$\text{א. הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

$$\text{ג. הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

15) נתון $z = h(u, v)$, $v = g(x, y)$, $u = f(x, y)$ מקיימות את משווהת

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

הוכחו כי:

א. v , u מקיימות את משווהת לפלאס.

$$\text{כלומר, } v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ ו } u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

16) נתון $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

17) פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם

הוכחו כי אם f הומוגנית, אז:

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. חשבו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

$$\text{ב. נתון } x = 2t, y = t.$$

חשבו את $(0)' z$ באופן ישר.

$$\text{ג. נתון } t = 2x, y = x.$$

חשבו את $(0)' z$ לפי כל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאה סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

ג. $-e$. (13)

$$\text{א. } f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad (18)$$

ב. $\frac{4}{5}$

ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הם שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 8 - נזרת מכונות וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נזרת מכונות וגרדיאנט 72

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$

- א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?
- ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2 y$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיבובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון لنקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 2 \cdot \mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודה (x, y) , נתון על ידי

מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון لنקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x (\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9) מצאו את הcyoon בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה לhattkrer כמה שיותר מהר, באיזה cyoon עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.
 א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הcyoon החיווי של ציר ה- x .
 ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הcyoon החיווי של ציר ה- y .
 ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.
 מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(-1, 2, -1)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הcyoon החיווי של ציר ה- x ,
 ו- 60° עם הcyoon החיווי של ציר ה- z .
 הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.
 א. חשבו את הנגזרת הcyונית של הפונקציה בנקודה Q ,
 בכיוון וקטור שיוצר זווית 60° עם הcyoon החיווי של ציר ה- x .
 ב. מצאו וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.
 ג. האם קיימים וקטור \vec{u} , כך ש- $6 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)$

$$\text{14) נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,

בכיוון הווקטור $(1, -1) = \vec{u}$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מזו בסעיף ד'.

$$\text{15) הפונקציה } f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (z,$$

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גובהה יותר, באיזה כיוון עלייה לנوع, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצא נמצאת כתע על שולחן בגובה 1 (משור $= z$), בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג', היא רוצה להגיע לטמפרטורה גובהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עלייה לנوع על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$\text{16) גללה מוחזקת בנקודה } (2,1,14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2.$$

שחררו את הגללה והיא התחליה לנوع על המשטח לפני מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $(a, b, c) = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילת של הגללה.

17) תהיו $f = f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המשור, המקיים:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4 \cdot 1$$

הנגזרת המכוונת של $y(x)$, בנקודה $(1,1)$, בכיוון הווקטור $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

שווה 1.

חשבו את הגרדיינט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיים $f = f(x, y, z)$

$$\vec{u} = (-2, 1, 2), \text{ כאשר } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$$

חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

א. חשבו את $(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 4))$, בכיוון הווקטור

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$

ג. חשבו $(\vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0))$, בכיוון וקטור \vec{v} , היוצר זווית α עם הכיוון החזובי של ציר x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0))$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $m < \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, לכל וקטור ייחידה \vec{u} ?

ב. מצאו וקטור ייחידה \vec{u} , המקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = 0$

הערות סימון

1) במרחב \mathbb{R}^2 : $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ או $\vec{u} = (x, y)$

למשל: $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמנו וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\vec{v} = (x, y, z)$ או

למשל: $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$

2) יש המسمנים וקטור \vec{u} גם ע או ו.

3) וקטור ייחידה יסומן \hat{u} .

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10 .

$$7.5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{48}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{5} \quad (7)$$

$$\frac{88}{3} \quad (6)$$

$$3\sqrt{13} \quad (5)$$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושויה ל- $-\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12,14,-12)$ ושויה ל- 22 .

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

$$\ell: (1,2,4) + t \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8+2\sqrt{3} \right). \quad \text{ג. } 8+2\sqrt{3} \quad \text{ב. } 8\sqrt{3}+2 \quad \text{א. } (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \quad (12)$$

$$\text{ג. לא.} \quad \text{ב. } \vec{u} = (5,1) \quad \text{א. } -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} \quad (13)$$

$$\nabla f(0,0) = (1,0) \quad \text{ג. } f_x = 1, f_y = 0 \quad \text{ב. } \text{הוכחה.} \quad (14)$$

ד. לא דיפרנציאבילית.

ה. 0.

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

$$(16) \quad \text{א. פרבולואיד.} \quad \text{ב. } \vec{u} = (4,4,-32)$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\nabla f(0,2,4) = (2, -3, 1) \quad (18)$$

$$12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ג. לא דיפרנציאabilית.} \quad \text{ב. } \frac{67}{5} \quad \text{א. } (19)$$

$$\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 12 \left(2/\sqrt{27} \right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ \quad \text{ד.}$$

$$\hat{u} = (21/29, -20, 29) \quad \text{ב.} \quad m > 29 \quad \text{א. } (20)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 9 - פונקציות סטומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

77	1. פונקציות סטומות - הפן הטכני
80	2. פונקציות סטומות - הפן התאורטי
87	3. שימושים גיאומטריים.....

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את y' , כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$

3) מצאו את $y''(e)$, $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$

4) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0), \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$

5) נתון $y = y(x, z) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$
חשבו את $y_x(0,0), y_z(0,0)$

6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$
 $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$
הוכיחו כי

7) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^3 - 2xz + y = 0$
מצאו $z_{xx}(1,1)$

8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנזרות המעוובות.

10) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

11) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$
הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת : $\begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases}$

הוכיחו כי :

$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$. א.

$z_{xy} = z_{yx}$. ב.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנזרות המעוובות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלה הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א. } (9)$$

ב. שאלה הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \text{ א. } (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \text{ ב.}$$

(11) שאלה הוכחה.

(12) שאלה הוכחה.

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס. בנקודה $(1,-2)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = g(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורדת בנקודה בה $x = 4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס. מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתריה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדרו פונקציה $(y, x) \rightarrow F(x, y)$ מותאמת,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיים תנאי מ.פ.ס.

בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

5) נתונה המשוואה $0 = 2x^3 + y^3 - 6xy$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.
- מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .

6) נתונה המשוואה הבאה : $0 = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $R^2 = x^2 + y^2$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסטומות,קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה ($y = f(x)$)
עשוי זו את בשתי דרכים :

 - על ידי תיאור גרפי של העוקום.
 - על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $0 = xy - ax^4 + y^4$, כאשר a קבוע ממשי.

- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסטומה.
- מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדרה את y כפונקציה של x .

9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- לא שימוש בתוכנה גרפית,קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגורות בנקודות הניל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדרה פונקציה $y = f(x)$.
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תננו הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשוואה $y = -8 - 6x \sin y + 6x^3$, ונמצא נקודה $(0, -2)$.

- הוכיחו שהמשוואה מגדרה פונקציה $y = g(x)$ בסביבת הנקודה.
- פתחו את (x, y) לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתווגות עבור $x = g(y)$.
 - נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדרה את $x = g(y)$, $x = g(y)$, $x = g(y)$.
- חשבו את $(1)'g$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $.x = g(y)$.

ב. הוכחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $.g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $z = 3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתווגה $.z = y(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתווגה $.z = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכחו שהפונקציה $.y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $z = 3x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתווגה $.z = y(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתווגה $.z = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתווגה $.z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $1 = \sin(x+y) + \sin(y+z)$.

מצאו נקודת שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה

ומצאו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיים תנאי משפט הפונקציה הסתווגה עבור $w = w(x,y)$ בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את $.w_x, w_y$.

ב. חזו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $? w = w(x,y)$

במידה שכן, חשבו בנקודה את $.w_x, w_y$.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתווגה עבור $w = w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות :

1) $x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) \quad y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) \quad z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- 1)** א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- 2)** א. הוכחה. ב. העקום יורץ. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. מוצאת סעיף ד' טוביה יותר.
- 3)** א. לא מתקיים. ב. כן. ג. לא.
- 4)** א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- 5)** א. כל נקודה (x, y) שעלה המשווה, ואשר שונה מהנקודות $(0,0), (2,2)$.
- 6)** א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(0,0), (\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a)$
- $$y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$$
- 7)** א. כל הנקודות על המנגנון אשר שונות מהנקודות $(R,0), (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדירש.
- 8)** א. $(0,0), (-0.5, -0.5)$. ב. כן, $a = \frac{1}{2}$. ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- 9)** א. כל נקודה (x, y) שעלה $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
- $$y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$$
- 10)** א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
- ה. $(x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1))$ $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- 11)** א. שאלת הוכחה. ב. x^2 . ג. ראה סרטון.
- 12)** א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה.
- 13)** א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- 14)** א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- 15)** א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- 16)** הנקודה היא $(\pi, 0, 0, 0.5\pi)$ והגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$

ב. לא מתקיים.

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \text{ נ. } \mathbf{(17)}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\}. \quad \text{נ. } w_x(2,2) = -3, w_y(2,2) = 3. \quad \mathbf{(18)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b} \text{ נ.}$$

שימושים גיאומטריים

שאלות

- 1)** נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 3$.
 מהי המשוואת מישור משיק למשטח בנקודה P , בה $x = -2$, $y = 1$?
- 2)** מצאו משוואת של מישור משיק למשטח $z = xy$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
 וכן משוואת של הישר הפרטורי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- 3)** מצאו מישור המשיק למשטח $z = 21 - 27x^2 - 27y^2$.
 המקביל למישור $z = 8x + 8y + 18$.
- 4)** למשטח \sqrt{a} העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
 מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C , בהתאם.
 נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
 הוכחו $OA + OB + OC = a$.
 (למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודות ההשקה)
- 5)** נתון המשטח $z = 8xz^2 - 2x^2yz + 3y^2$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
 הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$ בנקודה Q .
 מצאו את הנקודה Q .
- 6)** הראו שהמשטח $z = 4 - x^2 - 2yz + y^3$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
 המשטחים $z = x^2 + 1$, בנקודה החיתוך $(1, -1, 2)$.
- 7)** מצאו משוואת הישר המשיק לעקום C : $x = 6\sin t$, $y = 4\cos 3t$, $z = 2\sin 5t$ בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, המתקבל מהצבת $t = t_0$ במשוואת העקום.

ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, הנקודות הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

- ב. מצאו את משוואת המשור הנורמל לעקום
 $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$

(9) נתונות שתי עקומות
 $C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$
 $C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$

ונתנו כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודת הנמצאת במשור xy .

- א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.
 ב. מצאו את משוואת המשור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

ונתנו כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודת הנמצאת במשור xy .

- א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.
 ב. האם בנקודת הניל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום :

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$

- ב. בנקודת $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ היא
 בנקודה P שעליו, היא 0 כאשר $(a, b, c) = \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2 + v^2$, על ידי $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

מהו הנקודות שעבורן קיימים מישור משיק?

. מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$$, x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u$$

$$\text{עבור } u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$$

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלה הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלה הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad (9)$$

(10) א. קיבל שנקודות החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

(11) א. שאלה הוכחה. ב. $(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2)$.

(12) א. שאלה הוכחה. ב. $3x + 16y + 2z = -11$.

(13) כל נקודה, למעט $(0, 0, 0)$.

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 10 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלים

תוכן העניינים

91	1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים.....
93	2. הדיפרנציאל השלים - נוסחת הקירוב הלייניארי

נוסחת טילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טילור עד סדר שני סביב הנקודה (a,b) :

$$(a,b) = (1,2) \quad f(x,y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a,b) = (0,0) \quad f(x,y) = (1+y)\ln(1+x-y) \quad (2)$$

$$(a,b) = (0,0) \quad f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (3)$$

$$(a,b) = (2,1) \quad f(x,y) = \sqrt[3]{\frac{x^2-y}{x+y^2}} \quad (4)$$

5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את e^3 .

7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הDİפְרָנְצִיאָל הַשְּׁלָם – נוֹסְחַת הַקִּירֻוב הַלִּינְיָאָרִי

שאלות

- 1) חשבו בקירוב : $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- 2) בעזרת הדיפרנציאל השלים, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- 3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, והשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחשב.
- 4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10\text{ cm}$, $b = 24\text{ cm}$. חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4 mm ואת הצלע b יקצרו ב- 1 mm .
- 5) מדוד את האורך של תיבת, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחשב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

$$\approx -0.01 \quad (1)$$

$$2 \frac{7}{3200} \quad (2)$$

$$8\% \quad (3)$$

$$\text{שיעור מדויק: } 0.06472, \text{ שיעור מקורב: } 0.06153. \quad (4)$$

$$5\% \quad (5)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 11 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 94

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהfonקציות בשאלות 1-8,
מצאו נקודות קרייטיות וסווgoו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפchan 32 סמ"ק, חשבו את ממד htיבת השטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $z = -2x - 2y + z = 0$
וכן את הנקודה על המישור הקרוב ביותר לנקודה הניל.

- (12)** יוצר מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$ 6 ועלות הייצור מחשבון בסין היא \$.8.
 מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, P_1 ו- P_2 , על מנת למינimize את הרווח? מהו רוחח זה?

- (13)** נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
 א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודת קרייטית.
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

- (14)** מצאו שני מספרים, $a > b$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- (1)** אוכף ; $(-0.5, 1)$ מינימום.
(2) מינימום ; $(1, -2)$, $(-1, 2)$; $(-1, -2)$ אוכף.
(3) אוכף ; $(0, 0)$ מינימום.
(4) אוכף. $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$; $(0, 1)$ מקסימום ; $(-1, 1), (-1, -1)$ אוכף.
(5) מקסימום.
(6) מקסימום.
(7) מקסימום.
(8) אין נקודות קרייטיות.
(9) $z = 4$, $z = 3$
(10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
(11) מרחק מינימי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
(12) $P_1 = 10\$, P_2 = 12\$$ רוחח מקסימלי \$ 288\$.
(13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, $a < -2$, $a > 2$, לא ניתן לדעת ; אוכף ; $a < -2$ מינימום.
(14) $a = -6$, $b = 4$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 12 - קייזון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים
הפחותתיים

תוכן העניינים

1. קייזון של פונקציה רבת משתנים

96

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתוך) – ריבועיםՓחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 + 1$, לפרבולה $x = -y^2$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומי (מקורב) של משווה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$\cdot (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + b \quad (7)$$

$$\cdot (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + bx \quad (8)$$

$$\cdot (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (9)$$

$$\cdot (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} \quad (10)$$

. $(1,4.5), (0.5,2.3), (0,0.8), (-1,0.1), (-0.5,0.12)$, הדגימו עבור $h(x) = ax^2 + bx + c$ (11)

12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.
 מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
 יש להציג לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתפללים מפתרון המשוואות $f_a = 0$, $f_b = 0$,
 נוותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

תשובות סופיות

1) לכל t ממשי, מקסימום.

2) מקסימום.

3) אין קיצון. (1,2) אוכף.

4) אין קיצון. (1,2) אוכף.

5) מינימום.

6) 0.375

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (7)$$

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (8)$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (9)$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (10)$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (11)$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 13 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ 98

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y > 0} \{xy\}$ s.t. $x + 3y = 12$, כאשר $x, y > 0$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y \geq 0} \{2x + y\}$ s.t. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$, מצאו את הנקודות

שמרחxon מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחxon מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז : מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10) מושילה קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.

התועלת מצricaת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מושילה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת 16,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימלית.

נסחו ופתרו את בעיית מושילה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.

התועלת מצricaת הסל (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לدني תקציב של 12 ש"ח.

נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מגנו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.

לدني תועלת $y = 4x + 6$.

דני מחפש את הסל (אננס, מגנו) = (x, y) , על עקומת התמורה,

ה מביא למקסימום את התועלת שלו מצricaת מגנו ואננס.

נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.

המקרים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.

היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*)

ה מביא למינימום את העלות.

נסחו את בעיית היצרן (לא לפתרור).

14) נתונה בעיית קיזון תחת אילוץ $p_1x + p_2y = I$. $\max\{u(x, y)\}$ s.t.

תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב כללי של השקעה.

הוכיחו כי כופל לגראנזי λ מקיים $\frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I} = \lambda$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

(14) שאלת הוכחה.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 14 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- 1)** מבין כל התוצאות הפתוחות שנפחו 32 סמ"ק, חשבו את ממדיו התיבה ששתה הפנים שלה הוא מינימלי.
- 2)** מצאו על פני הcéדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$.
- 3)** ענו על השעיפים הבאים :
- מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 - מצאו נקודה על המישור $z = 2x - 2y$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.
 - בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- 4)** מצאו את הנקודות על המשטח $xy + 1 = z^2$ הקרובות ביותר לראשית.
- 5)** מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז : מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- 6)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $x + y + z = 0$ לבין ראשית הצירים.
- 7)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $x + y + z = 0$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בעוויות מעשיות. ישנן דרכי מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 15 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5), (3,0), (0,0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0), (2,2), (0,2), (0,0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $. R = \{(x,y) | x+y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $. R = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $\sqrt{10} + 1$. מינימום מוחלט $1 - \sqrt{10}$.

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 16 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

104	1. אינטגרלים כפולים
107	2. החלפת סדר אינטגרציה

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

. B(1,1), A(1,0), O(0,0) : D – משולש בעל הקודקודים : (4)

. B(-2,1), A(2,1), O(0,0) : D – משולש בעל הקודקודים : (5)

. C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) : D – טרפז בעל הקודקודים : (6)

. $x^2 + y^2 \leq 1$ – עיגול D – (7)

. $x^2 + y^2 \leq y$ – עיגול D – (8)

$$D = \{ (x,y) | y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\iint_D xy^2 dx dy \quad (11)$$

כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $x=1$.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x}} \quad (12)$$

כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

$$\iint_D |xy| dxdy \quad (13)$$

כאשר D עיגול בעל הרדיוס a , שמרכזו בראשית.

$$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy \quad (14)$$

כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y = 3a, y = a, y = x+a, y = x$. ($a > 0$)

$$\iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA \quad (15)$$

כאשר D התוחם הכלוא בין $x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}$.

תשובות סופיות

(1)

$$\frac{1}{40} \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{3}\pi \quad (3)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \\ & + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{32}{21} \quad (11)$$

$$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (12)$$

$$\frac{a^4}{2} \quad (13)$$

$$14a^4 \quad (14)$$

$$0 \quad (15)$$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6:

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x,y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

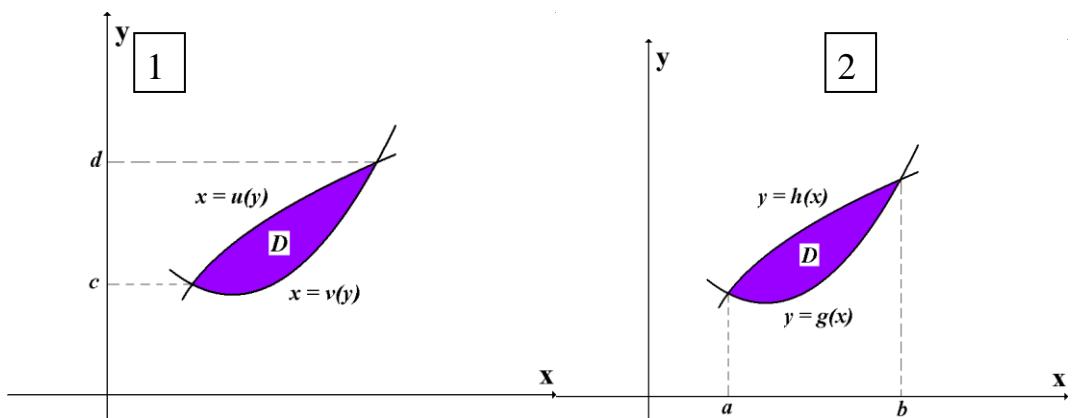
הערות סימון

[1]

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

[2]

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנו מושג שבחם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\text{כ}\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx. \quad \text{רישום זה אינו שגורி מאחר שכפל}$$

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dy dx$ ו- $dx dy$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 17 - שימושי האינטגרל ההפוך

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל ההפוך.....110

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלוֹת 1-4 חשבו את **שטחֵי התחומִים** החסומים ע"י העקומים :

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלוֹת 5-10 חשבו את **נפחֵי הגוףִים** החסומים ע"י המשטחים :

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (10)$$

11) לוח דק בצורת משולש, שקודדיו הם $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y) = xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז המבוקד של הלוח.

12) לוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x,y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההסתמך של הלוח סביב ציר ה- z .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13) מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

$$\frac{64}{3} \quad \text{(1)}$$

$$a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) \quad \text{(2)}$$

$$32 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{64}{3} \quad \text{(4)}$$

$$\frac{5}{6} \quad \text{(5)}$$

$$\frac{88}{105} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{17}{6} \quad \text{(7)}$$

$$16\frac{1}{5} \quad \text{(8)}$$

$$\frac{8}{3} \quad \text{(9)}$$

$$36 \quad \text{(10)}$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) . \text{ב} \quad \frac{1}{24} . \text{א} \quad \text{(11)}$$

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{12} \quad \text{(12)}$$

$$\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1) \quad \text{(13)}$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 18 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק	113
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות	115

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

(1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

(2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

(3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

(4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

(5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2} \right\}$

- 6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
 כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.



תשובות סופיות

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} . \text{ג}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} . \text{ב}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} . \text{א} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \\ or \\ 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases} . \text{ג}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} . \text{ב}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} . \text{א} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} . \text{ג}$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi . \text{ב}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} . \text{א} \quad (3)$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} . \text{ב} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} . \text{א} \quad (6)$$

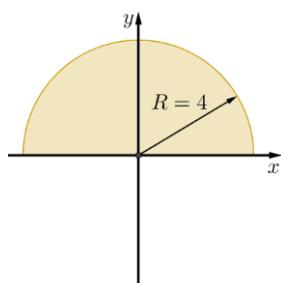
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

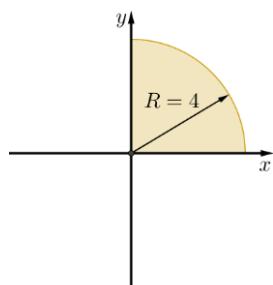
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המצויר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתkeletal לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

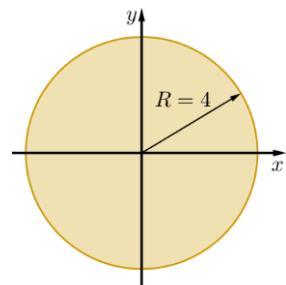
ג.



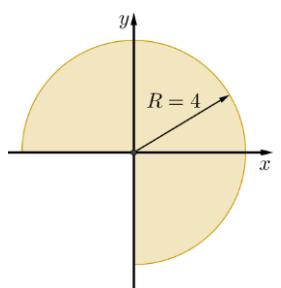
ב.



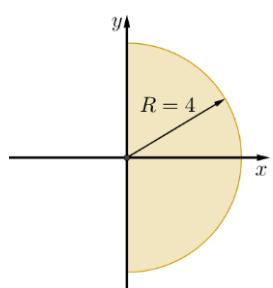
ג.



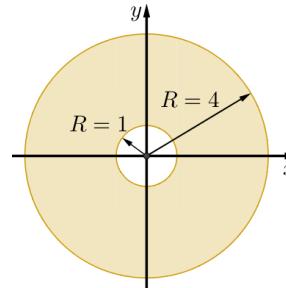
ד.



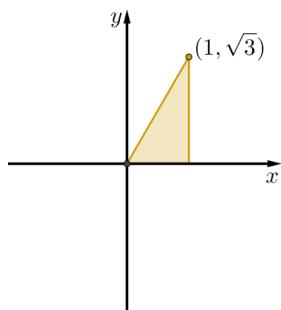
ה.



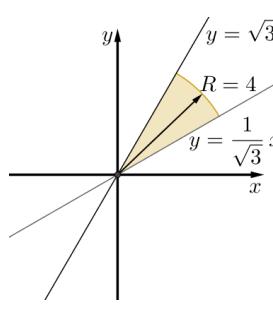
ט.



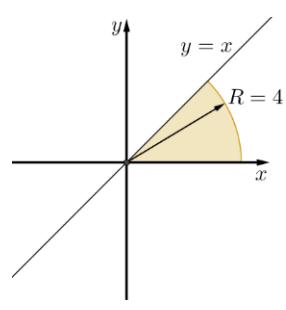
ט.



ט.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקובאורדיינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתווך:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ מלמעלה.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החירות $x^2 + y^2 = 2y$, בין המישור $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמטה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = z$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$, מלמטה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

$$\frac{64\pi}{3} \cdot \textcircled{5} \quad 42\pi \cdot \textcircled{7} \quad \frac{64\pi}{3} \cdot \textcircled{9} \quad \frac{32\pi}{3} \cdot \textcircled{2} \quad \frac{128\pi}{3} \cdot \textcircled{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta \cdot \textcircled{5} \quad \frac{32\pi}{9} \cdot \textcircled{9} \quad \frac{16\pi}{3} \cdot \textcircled{2} \quad 32\pi \cdot \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \textcircled{5} \quad \frac{\pi}{8} \cdot \textcircled{4} \quad \pi \cdot \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \textcircled{2}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \textcircled{9} \quad 36 \cdot \textcircled{8} \quad 2\pi \cdot \textcircled{7} \quad \pi a^2 \cdot \textcircled{6}$$

$$\frac{\pi(e-1)}{4e} \cdot \textcircled{13} \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e} \cdot \textcircled{12} \quad \pi(4-\pi) \cdot \textcircled{11} \quad \pi \ln \frac{e}{2} \cdot \textcircled{10}$$

$$\pi \cdot \textcircled{17} \quad \pi \ln \frac{4}{e} \cdot \textcircled{16} \quad -\frac{4}{5} \cdot \textcircled{15} \quad \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \textcircled{14}$$

$$\frac{(108 - 64\sqrt{2})\pi}{3} \cdot \textcircled{18}$$

$$\frac{32}{9} \cdot \textcircled{19}$$

$$\frac{5\pi}{32} \cdot \textcircled{20}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \textcircled{21}$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 19 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

118 1. החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

- 1)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי
 $y = 3-x$, $y = 1-x$, $y = x-1$, $y = x$.
- 2)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי
 $y = x$, $y = 0.5x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$
- 3)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא
התחום בצורת משולש שקודקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.
- 4)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת
מקבילית שקודקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$
- 5)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2 + 9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא
בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
- 6)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי
העיקומות $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$
- 7)** חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x,y) | |x| + |y| \leq 1\}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad \text{(2)}$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad \text{(3)}$$

$$192 \quad \text{(4)}$$

$$96\pi \quad \text{(5)}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{(6)}$$

$$e - \frac{1}{e} \quad \text{(7)}$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 20 - אינטגרלים תלויים בפרמטר (גזרה וaintגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזרה תחת סימן האינטגרל (aintגרל אמיתי).	120
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (aintגרל אמיתי).	122
3. אינטגרל לא אמיתי תלוי בפרמטר.	123
4. גזרה תחת סימן האינטגרל (aintגרל לא אמיתי).	125
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (aintגרל לא אמיתי).	127

גזרה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$

2) $(m, n > 0)$ חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$

5) הוכיחו כי $\int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}\right)$

6) חשבו את $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$

7) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

8) $(p > 0, m \in \mathbb{N})$ חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x^p (\ln x)^m dx$

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln 2.5$

(2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

(3) $\frac{\pi}{8} \ln 2$

(4) 2π

(5) שאלת הוכחה.

(6) $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln|\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases}$

(7) $\frac{\pi+2}{8}$

(8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

(9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx$, עבור $b, a > 1$.

3) הוכחו כי $\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2)$, לכל a ו- b .

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

4) בהינתן נוסחה $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

הוכחו כי $\int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$

תשובות סופיות

$$\ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right) \quad (1)$$

$$\pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right) \quad (2)$$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי תלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך.
 בחלק מהמוסדות מסתפקים רק הצד הטכני החישובי ולא נכensis לנושא זה כלל.
 בררו עם מתרגנות ואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא.
 במידה ולא, דלוו היישר לנושאים הבאים.
 בהצלחה!

שאלות

$$1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx, \text{ כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha < 0$.

$$2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx, \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

$$3) \text{ הוכיחו שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}} dx.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

$$5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיימים $0 > k > \alpha$.

$$6) \text{ נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx \text{ טבעי ולכל } \alpha \text{ המקיימים}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל $\alpha > 0$.

$$7) \text{ נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } 0 < \alpha \leq k.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$8) \text{ נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $0 < \alpha \leq k$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – [לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il](http://GooL.co.il)

газירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

2) הוכחו שלכל n טבוי מתקיים :

$$\cdot \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

3) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

4) חשבו את האינטגרל :

א. $n \in \mathbb{N}$, כאשר $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2} dx$

ב. $\int_0^\infty x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$

5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha > 0$)

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ ב.} \quad \sqrt{2\pi} \text{ א.} \quad (3)$$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $.1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ ג.} \quad \frac{945}{64}\sqrt{\pi} \text{ ב.} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ ב.} \quad -\arctan \alpha + \frac{\pi}{2} \text{ א.} \quad (5)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$

2) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$

3) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$

4) הוכחו כי עבור $r \in \mathbb{R}$ ו- $b > a > 0$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$

5) הוכחו:

$$(\alpha, r > 0) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha} . \text{ א}$$

$$(\alpha, r > 0) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} dx = \arctan \frac{r}{a} - \frac{a}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) . \text{ ב}$$

$$(\alpha > 0) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) . \text{ ג}$$

6) הוכחו:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} . \text{ א}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} . \text{ ב}$$

7) ענו על הטעיפים הבאים :

א. הוכחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

8) חשבו את $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

$$\ln \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2}(b-a) \quad (2)$$

$$\pi \quad (3)$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

$$\frac{\pi}{4} \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (8)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 21 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות	(ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות	129
3. חישוב גבול לפי אוילר	131
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ	132
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש	135
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית	136
7. חישוב גבול לפי ההגדרה	138
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה	140
9. הגדרת הגבול לפי הינה	143
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו וירשטראס	145
11. משפט שטולץ	150
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות	152
13. שאלות הוכח או הפרך	154

чисוב גבול לפי כללי חישוב גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt[3]{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2 + 1000n]{4n^2 + 2} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right) \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad * \quad \text{רמז לשאלת 24:}$$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקומות המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי. בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

$$4 \quad \mathbf{(2)} \qquad \qquad \qquad 0 \quad \mathbf{(1)}$$

$$0 \quad \mathbf{(4)} \qquad \qquad \qquad \infty \quad \mathbf{(3)}$$

$$1 \quad \mathbf{(6)} \qquad \qquad \qquad -5 \quad \mathbf{(5)}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad \mathbf{(8)} \qquad \qquad \qquad 1.5 \quad \mathbf{(7)}$$

$$4 \quad \mathbf{(10)} \qquad \qquad \qquad 0.25 \quad \mathbf{(9)}$$

$$\ln 3 \quad \mathbf{(12)} \qquad \qquad \qquad 2 \quad \mathbf{(11)}$$

$$e^{\frac{1}{3}} \quad \mathbf{(13)}$$

$$, \left(\lim a_n = \infty \right) \Leftarrow \left(a > 0, b = 0 \right) , \left(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b} \right) \Leftarrow \left(b \neq 0 \right) \quad \mathbf{(14)}$$

$$\left(\lim a_n = -\infty \right) \Leftarrow \left(a < 0, b = 0 \right)$$

$$\frac{k}{2} \quad \mathbf{(16)} \qquad \qquad \qquad 2.5 \quad \mathbf{(15)}$$

$$0.5 \quad \mathbf{(18)} \qquad \qquad \qquad 0.5 \quad \mathbf{(17)}$$

$$4 \quad \mathbf{(20)} \qquad \qquad \qquad \frac{a-b}{2} \quad \mathbf{(19)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \mathbf{(22)} \qquad \qquad \qquad 0.5 \quad \mathbf{(21)}$$

$$1 \quad \mathbf{(24)} \qquad \qquad \qquad \infty \quad \mathbf{(23)}$$

чисוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

чисוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\frac{4n+1}{n}}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right).$$

א. $\alpha \in (0,1)$, $a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha$

ב.

12) יהיו x מספר ממשי וחיובי.

$$a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$

נתבונן בסדרה:

הוכחו כי $2 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

13) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$

14) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$

15) חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k\sqrt{n}}}$$

16) חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$$

17) חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

18) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $1 < q < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל n טבעי.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

האם ניתן לפתרן ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- 4 (1)
 0 (2)
 0 (3)
 0.75 (4)
 3 (5)
 $\frac{3}{4}$ (6)
 0 (7)
 16 (8)
 0 (9)
 1 (10)
 (11) שאלת הוכחה.
 (12) שאלת הוכחה.
 9 (13)
 1 (14)
 $\frac{1}{2}$ (15)
 $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ (16)
 1 (17)
 (18) שאלת הוכחה.

чисוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

0 (2)

0 (1)

4 (3)

∞ (5)

чисוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

4) יהיו $a > 0$ ו- $x_1 > 0$.

נגידר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- \sqrt{a} .

5) יהיו $x_1 = a \geq 0$.

- נגידר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5} \left(x_n^2 + 6 \right)$, לכל n .
- מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/ יורדת.
 - קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת悠悠 $3.5 < a < 3$.

6) יהיו $0 < b_1 < a_1$

$$\text{נגידר } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ לכל } n.$$

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

7) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

א.1. נגידר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיימים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הטעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא \sqrt{a} .

(5) א. אם $a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.
ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \text{ ב.1. } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

чисוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n \right) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שבגבולו הוא יחיד.

(9) נתון כי $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

הוכיחו לפי ההגדרה, כי :

$$(a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה $\dots, 1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$ שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה $\dots, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, \dots$ שואפת לאינסוף.

17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכיחו או הפריכו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty . \text{ א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty . \text{ ב.}$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

- א. $1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$
- ב. $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$
- ג. $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

- א. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$
- ב. $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

$$a_n = \frac{(-1)^n n+4}{n+1}$$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1 \quad (6)$$

7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי :

- א. לסדרה $a_n = (-1)^n$ לא קיים גבול.
- ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n = (-1)^n$.
- ג. היעזר בתוצאות סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n = \frac{(-1)^n 3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ מתבדרת.

9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$ מתבדרת.

10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ לא קיים גבול.

11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ מתבדרת.

12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{10} - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$ מתבדרת.

13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$ מתבדרת.

14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ מתבדרת.

15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + 2}$ אין גבול.

16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \sqrt{n} - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ מתבדרת.

הדרך: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$\sqrt{m^2} - \left\lfloor \sqrt{m^2} \right\rfloor = 0 \text{ . 1}$$

$$\sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$\left\lfloor \sqrt{m^2 - 1} \right\rfloor = m - 1 \cdot 3 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$\sqrt{m^2 - 1} - \left\lfloor \sqrt{m^2 - 1} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

17) הוכחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$ לא שואפת ל $-\infty$.

18) הוכחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$ לא שואפת ל $-\infty$.

19) נתונה הסדרה $. -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$

הוכחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל $-\infty$.

ב. לא שואפת ל $-\infty$.

20) הוכחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \left[n\sqrt{10} \right]$ לא שואפת ל $-\infty$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי הינה

שאלות

1) הוכיחו כי :

$$\cos(2n\pi) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\sin(2n\pi) = 0 \quad \text{א.}$$

$$\cos((2n+0.5)\pi) = 0 \quad \text{ד.}$$

$$\sin((2n+0.5)\pi) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\cos((2n+1)\pi) = -1 \quad \text{ו.}$$

$$\sin((2n+1)\pi) = 0 \quad \text{ה.}$$

$$\cos((2n+1.5)\pi) = 0 \quad \text{ח.}$$

$$\sin((2n+1.5)\pi) = -1 \quad \text{ז.}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{ט.}$$

$$\sin(n\pi) = 0 \quad \text{ט.}$$

$$\cos((n+0.5)\pi) = 0 \quad \text{יב.}$$

$$\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n \quad \text{יא.}$$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי הינה :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x-4|} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{[10x]}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x]) \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]} \quad (8)$$

$$f(x) = 2^{\left[\frac{x}{2}\right]} \quad (10) \text{ נתון כי}$$

א. הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי הינה.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ לפי הינה.

ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n , כך שה- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ אינו קיים אך $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

11) הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x} - [\sqrt{x}] \right)$ אינו קיים לפי הינה.

רמז : הוכיחו ראשית כי לכל n טבאי מתקיים $\left[n^2 - 1 \right] = n - 1$

תשובות סופיות**10) ב.** $\sqrt{2}$ לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו וירשטרاس

שאלות

- 1) חשבו את הגבולות שלහן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2} . \text{ א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2} . \text{ ב.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n . \text{ ג.}$$

- 2) חשבו את הגבולות שלහן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right) . \text{ א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor) . \text{ ב.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left[\frac{n}{4} \right] \right) . \text{ ג.}$$

- 3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
א. הוכיחו שקיימים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e . \text{ ב. הוכיחו כי}$$

- 4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול : $a_n = \sin \left(\frac{n\pi}{3} \right)$

- 5) חשבו את הגבול הבא : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$

6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1 = 2$
 $a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$

7) נתונה סדרה a_n , המוגדרת על ידי
 $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$; $a_1 = 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה סדרה a_n , המוגדרת על ידי ($n \in \mathbb{N}$)
 $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$; $a_1 = 0$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע לפחות פעם אחת בסדרה הינו גבול חלק של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה לפחות גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצאו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

15) נתונה סדרה a_n , ונדרש סדרה חדשה b_n על ידי
 $b_n = \sqrt[n]{a_n} \cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותן גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

$$\text{הוכיחו שלכל } N \in \mathbb{N} \text{ קיימים } m, n \in \mathbb{N}, \text{ כך ש-} . |a_m - a_n| > \frac{1}{2}$$

17) נתונה סדרה a_n .

שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L. 1$$

2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים לפחות אחת מתוך הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \rightarrow L$

הערה: טענה זו הוסבירה והודגמה בסרטון "שיטת להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעורתה פתרנו את שאלות 4-5.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הטעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה $a_n \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq \sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$

21) הוכיחו את המשפט המפורטים הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקאים

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$$

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

(23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $0 < L$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי של a_n .

ג. הוכיחו שלא ניתן ש- $0 < L$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שלא דרישת החסימות,

ניתן ש- $0 < L$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

(25) ענו על הטעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתרdroות, (a_n) ו- (b_n) .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיים $1 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $a_n = b_n$.

(26) תהי $a_n = \left\langle \sqrt{n} \right\rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf_{n \rightarrow \infty} a_n$ וקבעו האם '-'

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $1 \leq a_n \leq 2$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ וקבעו האם '-'

יש מקסימום.

$$\text{.} \quad (27) \quad \text{תהי } (a_n) = \left(n - \sqrt{n} \left[\sqrt{n} \right] \right)$$

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- 0 הוא גבול החלקי של (a_n) .

ג. מצאו את $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ ואת $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.

הוכחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.

$$\text{הוכחו כי } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n \right)$$

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול החלקי של (a_n) .

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

ט. מצאו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם הקבוצה $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

(1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.

ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.

ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.

(2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.

ב. הגבול של הסדרה הוא 0.

ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, 0.25, 0.5, 0.75.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

1) חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

2) חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$

3) חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, כאשר p קבועשלם וחיוובי.

4) חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$, אם ידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}$

5) חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lceil 1^2 \cdot a \rceil + \lceil 2^2 \cdot a \rceil + \dots + \lceil n^2 \cdot a \rceil}{n^3}$, כאשר a קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$ (סדרת הממוצעים ההרמוניית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$.

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $0 < a_n < L$ לכל n .

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{p+1}$ (3) $\frac{k}{3}$ (4) $\frac{a}{3}$ (5)

6 שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנשות סדרות

שאלות

1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n , כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k |x_{n+1} - x_n|$ לכל n , כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכון מתכנסת.

7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \text{ א.}$$

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2} \text{ ב.}$$

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8) \text{ ג.}$$

9) נגדיר סדרה x_n על ידי $x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

10) סדרה x_n מקיימת $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$ לכל n טבעי, ו- $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרך: הוכיחו ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$.

11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $\alpha < 0$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלת 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכיחו או הפריכו

הערת ניסוח

הניסיוחים הבאים שколоים:

- א. קיימים N טבאי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X .
- ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X .
- ג. לכל n , פרט למספר סופי של n -ים, מתקיימת הטענה X .

שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

(1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז היא לא חסומה.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ (3) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

(4) אם a_n ו- b_n אין גבול, אז גם $a_n + b_n$ ו- $a_n \cdot b_n$ אין גבול.

(5) אם a_n ו- b_n אין גבול, אז גם a_n / b_n אין גבול.

(6) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.

(7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.

(8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$, או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ (9)

(10) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, אז $a_n < b_n$ לכל n ,

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (11) אם

. $k < 1$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ (12) אם $a_n < 1$, אז $k < 1$.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (13) אם

(14) הוכיחו או הפריכו :

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים,
אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- $b_n \neq 0$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- $b_n \neq 0$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיימים N טבעי, כך שכל $N > n$ מתקיים

$$\cdot \left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקית, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

(15) אם לכל n מתקיים : $a_n \in (0, 1)$, $a_{n+1} < a_n^2$ אז הסדרה a_n מתכנסת.

. $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת. (16) הסדרה

(17) אם לכל n מתקיים : $x_n \in (0, 1)$, $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השוואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם הסדרה $(x_n + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.
- ב. אם הסדרה $(x_n^2 + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

(20) x_n סדרה של מספרים שלמים המקיים $x_n \neq x_{n+1}$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו :

- א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.
- ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם $a_n < b_n$ ו- $a < b$, אז כמעט לכל n מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.
- ב. אם $a \leq b$, $a_n \leq b_n$ וכמעט לכל n מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

(22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

- א. אם $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n = 0$.
- ב. אם $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \geq 0$.
- ג. אם $0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \neq 0$.
- ד. אם $0 > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$.

(23) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$, אז $a_n \leq k$ לכל n .
- ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < k$, אז $a_n < k$ לכל n .

(24) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(25) הוכיחו או הפריכו :

- אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$

. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$: נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n) , שבעבורן

הוכיחו או הפריכו :

א. $a_n \rightarrow 2$, $b_n \rightarrow 0$ או $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 2$.

ב. $a_n b_n \rightarrow 0$.

. **27)** נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$ forall n טבעי?

28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה :

. $0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n)$ לכל n, m טבעיים.

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. תהיינה (b_n) ו- (a_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ נתונה הסדרה

הוכיחו או הפריכו :

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז : לכל $0 \leq x$ מתקיים $\ln(1+x) \leq x$.

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ סדרות, כך שמתקיים

(31) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(32) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ (33)

ב. קיים $0 < N$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $0 < b_n$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$

א. אם, כמעט לכל n , $b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (34)

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,

כאשר ידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$ סדרות, כך שמתקיים

א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים. (35)

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $0 < N$, כך ש- $n > N$, $b_n < \frac{1}{2a_n}$, לכל N

(36) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ מתכנסת או $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ מתכנסת.

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (37)

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ו- a_n אפסה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ חיובית ואפסה.

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (38)

* הערכה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנtones השאלת.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,

. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$ סדרות, כך שמתקיים

. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. א.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $a_n > 1$, אז

. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $a_n > 1$, אז

. $b_n \neq 0$.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ א.

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $0 < b_n < a_n$, אז

. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ג.

. $a_n < \frac{1}{3}$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ אם

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ חיוביים, אז (42)

. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $b_n \geq c$ כמעט לכל n , אז

(43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

. קיימת סדרה (a_n) כך $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו-

. קיימת סדרה (a_n) כך $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו-

. קיימת סדרה (a_n) כך $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו-

. קיימת סדרה (a_n) כך $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$ לא קיים.

44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ לא קיים.

45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

46) נתונה סדרה חיובית (a_n) .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

הערה : תרגיל זה מלמד שבחן השורש "חזק" מבנן המנה במובן הבא :
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך היפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית (a_n) , וידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

48) סדרה (a_n) תיירה יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.

49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $-1 < a_{n+1} - a_n < 2$, לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיימים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.
- כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שליליים (a_n) שליליים.
- אם לכל n מתקיים בנוסח $\frac{a_n}{a_1} < -1$.

50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיימים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם $0 > |a_n|$ לכל n , אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם לכל n מתקיים $n \geq |a_n|$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 22 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים	162
2. מבחן ההתבדרות של טורים	165
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים	166
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים	168
5. התכנסות בחילט והתכנסות בתנאי	170
6. תרגילי תיאוריה	171

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

: 12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{כ.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

14) חבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, אם ידוע כי

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא ...0.123123123...+0.141414... .

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| (3) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$. | (2) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$. | (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$. |
| (6) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$. | (5) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$. | (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$. |
| (9) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$. | (8) מתכנס ל- $-\frac{1}{2}$. | (7) מתכנס ל- $-\frac{1}{2}$. |
| ג. מתבדר. | ב. מתבדר. | (11) $S = \frac{1}{\ln 2}$ |
| ו. מתכנס. | ה. מתכנס. | (12) א. מתכנס. |
| ג. מתבדר. | ב. מתבדר. | ד. מתבדר. |
| | | (13) א. מתכנס. |
| | | $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$ (14) |
| | | $\frac{323}{1221}$ (15) |

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ג. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ב. | $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ א. |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ ג. | $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ה. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ד. |

תשובות סופיות

1) א-ו : מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$

מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הגוביי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{\sqrt{n^{10} + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ובחן ראנָה

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|--------|--------|--------|
| (3) | (2) | (1) |
| מתכנס. | מתבדר. | מתבדר. |
| (9) | (8) | (4) |
| מתכנס. | מתבדר. | מתכנס. |
| (12) | (11) | (10) |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (15) | (14) | (13) |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (18) | (17) | (16) |
| מתכנס. | מתכנס. | מתבדר. |
| (21) | (20) | (19) |
| מתכנס. | מתכנס. | מתכנס. |
| (24) | (23) | (22) |
| מתכנס. | מתכנס. | מתכנס. |
| (26) | (25) | (25) |
| מתבדר. | מתבדר. | מתבדר. |
| | ב. | א. |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן ליבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 3-1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגס :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

6) הוכיחו שהטורים $\sum \sin n\theta$, $\sum \cos n\theta$, כאשר $\theta \neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$(\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

8) בדקו התכנסות הטור $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושוואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n \sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$

מבחון אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|----------------|
| (3) מתכנס. | (2) מתכנס. | (1) מתכנס. |
| (6) הוכחה. | (5) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (9) הוכחה. | (8) מותבדר. | (7) הוכחה. |
| (11) מתכנס. | ב. מתכנס. | (10) א. הוכחה. |
| (14) מתכנס. | (13) מתכנס. | (12) מתכנס. |

התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלה, מתכנס בתנאי או מתבדר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) מתבדר. | 2) מתכנס בתנאי. |
| 3) מתכנס בתנאי. | 4) מתכנס בהחלה. |
| 5) מתכנס בהחלה. | 6) מתכנס בתנאי. |
| 7) מתכנס בתנאי. | 8) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתכנס, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס.

3) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

4) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.
הוכחו שגם $\sum |a_n|^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין השעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

8) הוא טור אי-שלילי ומתכנס. $\sum a_n$

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתקנס $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n$, $\sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2$, $\sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$), אז $\sum a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_1 = \frac{21}{20}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, כאשר $(n \geq 1)$

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$\text{21) הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$\text{22) נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{23) נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1-a_{n+1}) > 1. \text{ האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$\text{24) נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיים } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} < 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$\text{25) (a}_n\text{) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס. הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

- 26)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו או הפריכו:
 א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מותכנת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מותכנת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מותכנת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקולון עם שארית לגרנץ'.

28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0) = 0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
 $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
 $p(0) = 0 \Leftrightarrow \sum P(a_n)$ מתכנס.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טוריים חיוביים.
נתון כי :

(1) הטור $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנס.(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר : GooL.co.il

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 23 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות

תוכן העניינים

176	1. סדרות פונקציות
179	2. טורי פונקציות
181	3. טורי חזקות
183	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבסעיפים 1-11:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$\cdot (0,1) \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (2) \quad \cdot [0,0.5] \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (1)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad (4) \quad \cdot (0,\infty) \text{ ב-} f_n(x) = \arctan(nx) \quad (3)$$

$$\cdot [0.5,4] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad (6) \quad \cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (5)$$

$$\cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad (8) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad (7)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = n(1-x)x^n \quad (10) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad (9)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{12) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{13) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[1, \infty)$?

$$\text{14) נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{15) נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\cdot \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת במידה שווה ב- $(\infty, 1]$?

תשובות סופיות

- 1)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 2)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 3)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 4)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 5)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 6)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 7)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 8)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 9)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 10)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 11)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 12)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 13)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- 14)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 15)** א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $(1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורר פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטוררים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התחום הטעון שווה של הטוררים הבאים, בתחום המופיע לידם:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

$x > 0$ **(1)**

$x \neq 5$ **(2)**

$x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$ **(3)**

$0 < x \neq \frac{1}{n}$ **(4)**

$x > 0$ **(5)**

$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ **(6)**

(7) מתכנס במידה שווה.**(8)** מתכנס במידה שווה.**(9)** מתכנס במידה שווה.**(10)** מתכנס במידה שווה.**(11)** מתכנס במידה שווה.**(12)** מתכנס במידה שווה.

טוריות חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות נמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתורן תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(2)}$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad \text{(1)}$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad \text{(4)}$$

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad \text{(3)}$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad \text{(6)}$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad \text{(5)}$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(8)}$$

$$x = 1, R = 0 \quad \text{(7)}$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad \text{(10)}$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad \text{(9)}$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad \text{(12)}$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad \text{(11)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad \text{(14)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{(13)}$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad \text{(16)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad \text{(15)}$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad \text{(18)}$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad \text{(17)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad \text{(20)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad \text{(19)}$$

גזרה וaintגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 7-1 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\text{8) חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$\text{9) חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

10) ענו על הטעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$

11) ענו על הסעיפים הבאים :

a. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

b. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \cdot \text{ב.} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \text{ . נ } (10)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \cdot \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \text{ . נ } (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13)$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 24 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

185	1. טור טיילור וטור מקלורן
187	2. טור טיילור סביב $X=0$
188	3. חישוב סכום של טור
189	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
190	5. חישובים מקורבים עם השארית של ליבנץ
192	6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
193	7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
199	8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות.

טור טיילור וטור מקלרון

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביבה $x = 0$ (טור מקלרון) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan \left(\frac{x}{3} \right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.

לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה וaintגרציה של טורי מקלרון.

אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלרון המופיעים בספר.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלרון של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x_0 = x$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1) \\ (0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2) \\ (0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3) \\ (-\infty < x < \infty)$$

чисוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$\pi/4 \quad (5)$

$2e \quad (4)$

$\sqrt{e} \quad (3)$

$e^{-2} \quad (2)$

$e \quad (1)$

$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$

$\ln 2 \quad (8)$

$\cos 1 \quad (7)$

$\sin 1 \quad (6)$

чисוב גבולות בעזרת טורי מקלורו

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

чисובים מקורבים עם השארית של ליבנץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\arctan 0.25 \quad (3)$$

$$\sin 3^\circ \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} \quad (1)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורו, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(n=1) \cos 4^\circ \quad (5)$$

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $x \approx \ln(1+x)$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$?

10) עברו אילו ערכי x , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.001 תהיה מינימלית?

11) עברו אילו ערכי x , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.01 תהיה מינימלית?

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{1}{48}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{160}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{77}{192} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

чисוב מוקרוב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

чисובים מוקרבים עם השארית של לגראנץ'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב ? $|x| < 0.1$

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $1 < x < 0$ מתקיים :

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב 16, $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים :

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

$$7) \text{ נתונה } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $1 \leq x \leq 0$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

$$\text{ב. הוכחו שלכל } 0 \geq x \text{ מתקיים } x \leq \sqrt{1+x}.$$

$$8) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3 עבור $0.9 \leq x \leq 0.1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.
- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$0.1 \leq x \leq 0.9, \frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^2-x^3$$

$$\text{ג. הוכחו כי עבור } x < -1 \text{ מתקיים } \frac{1}{1+x} \geq 1-x+x^2-x^3.$$

$$9) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$|x| \leq 0.5, \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$\text{ג. פתרו את אי השוויון } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } -1 < x < 0.$$

10) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נוסחת מקלוון עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

$$\text{ב. חשבו את } \sqrt[e]{e} \text{ ברמת דיוק של } 10^{-4}.$$

- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$0 \leq x \leq 1, e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שבעורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שבעורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $0 < x$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \ln(1+x) < x$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f'(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

$$\text{הוכיחו כי } |f'(x)| \leq \frac{M}{2} \text{ לכל } 0 \leq x \leq 1.$$

13) תהי $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיימים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

$$\text{הוכיחו שלכל } -1 \leq x \leq 1 \text{ מתקיים } |f(x)| \leq \frac{M}{2}.$$

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי M לכל $x < 0$ $|f'(x)| \leq M$.

$$\text{הוכיחו כי } 0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}.$$

15) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$.

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos x - \cos y \geq (x - y) \sin(\frac{x+y}{2})$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

$$\text{הוכיחו כי } (M_1)^2 \leq 2M_0M_2.$$

17) נתנו ש- f גזירה פעמיה ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תשובות סופיות

1) א. נוסחה : $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$

חישוב : $\cdot \frac{5}{663552}, \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$

ב. שאלת הוכחה. $\frac{1}{480000}.$ ג.

2) א. נוסחה : $\tan 0.1 = \frac{1}{10}, \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, שגיאה בקירוב :

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה : $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$

חישוב : $\cdot \frac{1}{512} : \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה : $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$

חישוב : $\cdot \frac{1}{3130}, \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$

5) $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$

$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3.$ ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5^3}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5^5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5^7}}{7!}.$ א. **6)**

ב. שגיאה הקטנה מ- 0.25. **7)** א. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$

א. $\cdot \frac{6561}{10000} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ בשגיאה הקטנה מ-

ב. שגיאה הקטנה מ-. **8)** ג. שאלת הוכחה. $\frac{6561}{10000}$

א. $\cdot \frac{7}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ-

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $\sqrt{e} = 1.6487$ ב. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

ג. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$ ד. $\frac{3}{(n+1)!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} . \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} . \quad \text{ב.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} . \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז علينا לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .
 למשל, דיקוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעתו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.
 בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקרים מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורו של פונקציות חשובות

טור מקלורו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

חדוֹא 2 הנדסת מכונות

פרק 25 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

200	1. הצגה פרמטרית של עקום.....
202	2. הנגזרת ושימושה.....
203	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

הציגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן הציגה הפרמטרית הנתונה, להציגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) עברו מן הציגה הקרטזית הנתונה, להציגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה,
שבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1, y = t(0.5t+1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$

ז. $x = k \cos t, y = k \sin t$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 \text{ . ב} \quad y = x - 1, x \geq 1 \text{ . א} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 \text{ . ג}$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi \text{ . ב} \quad x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad (2)$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi \text{ . ג}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \text{ . ג} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \text{ . ב} \quad y = (x+4)^2 \text{ . א} \quad (3)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 \text{ . נ} \quad x^2 + y^2 = 25 \text{ . ה} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \text{ . ט}$$

הנגזרת ושימושה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה
 $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$
 הנתונה בצורה פרמטרית.

2) נתון העקום
 $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
 א. שרטטו את העקום.
 ב. חשבו את (x', y) בשלוש דרכים שונות.
 ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודת $t = -1$.
 ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודת $t = -1$.

3) נתון העקום
 $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$
 א. שרטטו את העקום.
 ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודת $(0, 0)$.
 ג. מצאו את הנקודות עבורה המשיק לעקום הוא אופקי,
 ואת הנקודות עבורה המשיק לעקום הוא אנכי.
 ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

$$y = -0.5x + 3 \quad \text{ד.} \quad y = 2x + 3 \quad \text{ג.} \quad y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון.} \quad (3) \quad \text{א. ראו בסרטון.} \quad \text{ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי-} (0, -9) \quad \text{אנכי-} (-2, -6), (2, -6) \quad \text{ד. } -1 < t < 1 \quad \text{א. } t > 1 \quad \text{כמור.}$$

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבו את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

2) חשבו את השטח הכלוא בתחום האלייפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $0 < a, b >$,

* שימושו לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתחום מעגל עם רדיוס r .

3) חשבו את השטח הכלוא בין העוקום $y = t + \sin t$ לבין ציר ה- x , $0 \leq t \leq \pi$, $x = \cos t$.

4) חשבו את השטח הכלוא בין העוקום $y = \sin^2 t$ לבין ציר ה- x , $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = 4 \cos t$.

5) חשבו את אורך העוקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

6) חשבו את אורך העוקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1, 0)$ לנקודה $(-1, \pi)$.

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצאו את המרחק שהחליק עבר והשו אותו לאורך העוקום עצמו.

7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי הציגה הפרמטרית $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t = 0$ לביין $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

8) חלק העוקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t = 0$ לביין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חלק העוקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t = 0$ לביין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבו את אורך העוקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

. $1 \leq t \leq 3$, $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$ **11)** חשבו את אורך העקום

תשובות סופיות

8/3 **(1)**

πab **(2)**

1.5π **(3)**

$16/3$ **(4)**

8 **(5)**

4 **(6)**

7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

$4\pi r^2$ **(8)**

$6\pi/5$ **(9)**

$6\pi\sqrt{29}$ **(10)**

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$ **(11)**